<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>

שלב ב'

1. על הלוח כתוב מספר דו ספרתי.
   אבי אמר: "*במספר הזה יש ספרה 5*"
   בני אמר: "*זה הוא מספר ריבועי*"
   גילי אמרה: "*המספר הזה גדול מ-50*"
   דני אמר: "*המספר מתחלק ב-7*".

אז המורה אמרה: "יש פה שלושה משפטים נכונים ואחד שגוי".
איזה מספר היה כתוב על הלוח?

פתרון: נטען שלא יכול להיות שהמספר גם מתחלק ב-7 וגם ריבועי מכיוון שאז הוא צריך להתחלק ב-7 פעמיים ולכן חייב להיות 49 אבל הוא לא גדול מ-50 ואין בו את הספרה 5 ולכן יש שני משפטים שגויים, בסתירה לנתון.

בנוסף נטען שלא יכול להיות שגם במספר יש את הספרה 5 וגם הוא ריבוע, נשים לב כי מבין המספרים 50 עד 59 אין ריבועים ולכן ספר היחידות של המספר צריכה להיות 5 כלומר הוא צריך להתחלק ב-5 ואם אנו רוצים שהוא יהיה גם ריבוע אז הוא צריך להיות 25 אבל 25 לא גדול מ-50 ולא מתחלק ב-7 ולכן יש שני משפטים שגויים, בסטירה לנתון.

סך הכל קיבלנו כי מבין המשפטים של אבי ובני אחד שגוי ומבין המשפטים שני בני ודני אחד מהם שגוי ולכן המשפט של בני שגוי ולכן המשפטים של אבי גילי ודני נכונים.

הוכחנו שהמספר הרשום על הלוח מתחלק ב-7, יש בו את הספרה 5 והא גדול מ-50. אם ספרת האחדות של המספר היא 5 אז הוא צריך להתחלק ב-5 אבל גם ב-7 ולכן ב-35, אם אנו רוצים שיהיה גדול גם מ-50 הוא צריך להיות 70 אבל אז אין בו את הספרה 5, מכאן נובע כי ספר העשרות של המספר היא 5, אבל מבין המספרים 50-59 יש בדיוק אחד שמתחלק ב-7 וזה 56.

ברור ש-56 מקיים את תנאי השאלה, יש בו את הספרה 5, הוא לא ריבוע, הוא גדול מ-50 והוא מתחלק ב-7.

2. בתרגיל הבא ספרות שונות הוחלפו באותיות שונות, וספרות זהות הוחלפו בספרות זהות. מצאו את המספר התלת ספרתי ABC.

$$ABC - A - B - C = DCA$$

פתרון: נתבונן במה שקורה עם ספרת האחדות, היה לנו את C, הורדנו ממנו את B,A ו-C וקיבלנו שוב את A, ברור ש-C הצטמצם ולכן רצינו לחסר מ-0 את A ו-B ולכן כמובן העברנו משהו מספרת העשרות, יכול להיות שהעברנו 10 ויכול להיות שאפילו 20, נבין את זה אחר כך וכעט נעבור להסתכל מה קרה עם ספרת המאות, היה את A ואז הוא הפך ל-D כלומר לקחנו משהו מהמאות, ברור

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>

שלב ב'

שלא לקחנו יותר מ-100 מכיוון שסך הכל החסרנו מהמספר שלנו שלושה מספרים חד ספרתיים ולכן החסרנו פחות מ-30 (לכל היותר 27) ולכן D חייב להיות קטן ב-1 מ-A.

עכשיו נעבור לספרת העשרות, היה לנו את B, כפי שכבר הבנו ספרת היחידות C, לא הצליחה להתגבר על B,A ו-C ולכן ביקשה עזרה מספרת העשרות B, היא ביקשה או 10 או 20 אבל התברר ש-B לא הצליח לתת את מה שביקשו ממנו וביקש עזרה מ-A (אחרת הוא לא היה הופך ל-D בסוף) ולכן B יכול להיות או 0 או 1, בשני המקרים מה שהחסרנו מספרת היחדות (אחרי שצמצמנו את C) לא עולה על 10 מכיוון ש-A הוא לכל היותר 9 ו-B לכל היותר 1 ולכן בעצם ספרת היחידות ביקשה מספרת העשרות רק 10 ולא 10 ולכן B חייב להיות 0 (כי הוא לא הצליח לספק את ה-10 שביקשו ממנו וביקש עזרה מ-A).

נחזור שוב להתבונן בספרת היחידות, היה את C שהצטמצם ואז קיבלנו 10 מספרת העשרות ואז החסרנו A וקיבלנו שוב את A ולכן A חייב להיות 5, ולכן D חייב להיות 4.

נשאר לנו רק להבין מה זה C, בשביל זה נתבונן בספרת העשרות, היה את B שהיה 0 ואז הוא קיבל 10 מספרת המאות ואז נתן 1 לספר היחידות ולכן נשאר לנו 9, אבל ידוע שנשאר C ולכן C זה 9.

סך הכל מקבלים שהתרגיל היה:

$$509-5-0-9=495$$

3. בכיתה מספר תלמידים ולכל אחד מספר סוכריות:
יש בדיוק 10 ילדים עם לפחות סוכריה אחת,
בדיוק 8 ילדים עם לפחות שתי סוכריות,
בדיוק 6 ילדים עם לפחות 3,
בדיוק 4 ילדים עם לפחות 4,
בדיוק ו-2 ילדים עם 5 סוכריות.
ידוע שלאף אחד אין יותר מ-5 סוכריות. כמה סוכריות יש בכיתה?

פתרון: נבנה דיאגראמה, העמודות בדיאגראמה ייצגו את הילדים והגובה בכל עמודה יתאר את כמות הסוכריות של הילד. אנו מתבקשים לחשב את גודל הדיאגראמה.

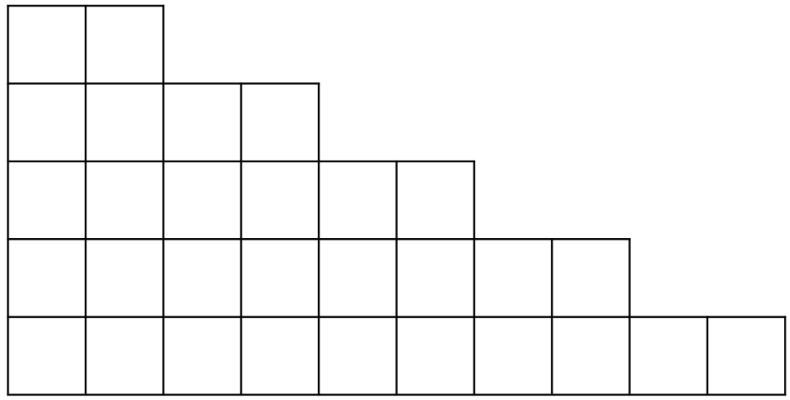
נתון שיש בדיוק 10 ילדים עם לפחות סוכריה אחת, כלומר בשורה הראשונה בדיאגראמה יש בדיוק 10 משבצות.

בנוסף נתון שיש בדיוק 8 ילדים עם לפחות שתי סוכריות, כלומר בשורה השנייה בדיאגראמה יהיו בדיוק 8 משבצות. נתון שיש בדיוק 6 ילדים עם לפחות 3, בדיוק 4 ילדים עם לפחות 4, בדיוק ו-2 ילדים עם 5 סוכריות. כלומר בשורות השלישית הרביעית והחמישית יש בדיוק 2,4,6 משבצות ולכן

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>

שלב ב'

סך הכל בדיאגרמה יהיו $10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 30$ משבצות, שזה כמובן גם כמות הסוכריות בכיתה.



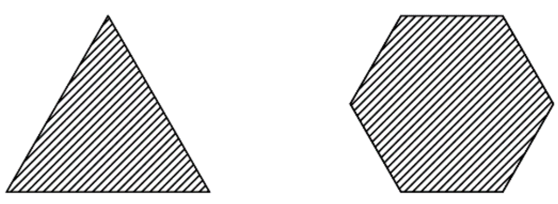
הערה: דיאגרמה כזו נקראת דיאגרמת יאנג.

4. כמה מספרים חמש ספרתיים מתחלקים ב-2 או ב-5, ולא מתחלקים ב-3?

פתרון. בואו נספור כמה אפשרויות למספרים כאלה יש. לספרת היחידות יש 6 אפשרויות: 0, 2, 4, 5, 6, 8, כי המספר חייב להתחלק ב-5 או ב-2. אחרי זה, לספרת העשרות יש 10 אפשרויות – ניתן להשתמש בכל ספרה, אותו הדבר לספרת המאות, ספרת האלפים וספרה של עשרות אלפים. עכשיו נשארה ספרה של מאות אלפים, וחשוב לנו שהמספר לא יתחלק ב-3. ניזכר שמספר מתחלק ב-3 אם ורק אם סכום ספרותיו מתחלק ב-3. כלומר, הספרה השמאלית ביותר במספר חייבת להשלים את סכום הספרות עד מספר שלא מתחלק ב-3. נשים לב שלכל סכום אפשרי של הספרות האחרות, יש בדיוק 3 אפשרויות שמשלימות אותו למספר שמתחלק ב-3, ואז, בהתאמה, 6 אפשרויות להשלים למספר שלא מתחלק ב-3. אזי, המספר הכולל של אפשרויות הוא $6\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 6 = 36000$.

תשובה. 36000.

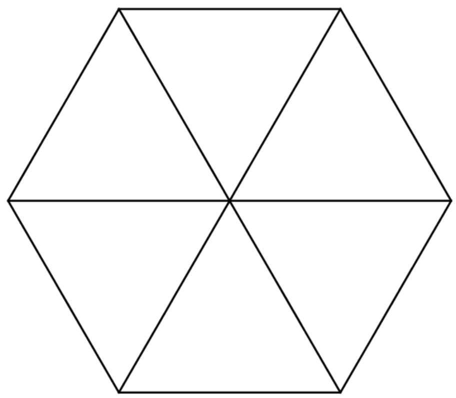
5. יש משושה משוכלל ומשולש שווה צלעות עם היקף זהה. ידוע ששטח המשולש שווה ל-60. מצאו את שטח המשושה.

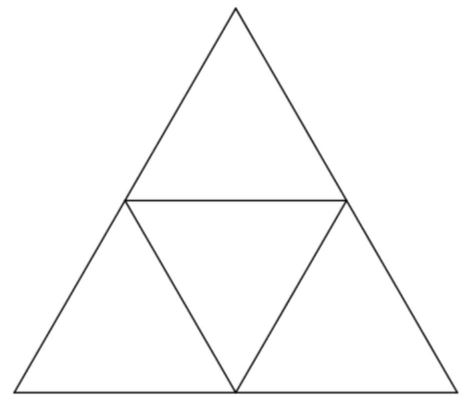


פתרון: למשולש ומשושה יש את אותו ההיקף אבל למשושה יש פי שתיים יותר צלעות ולכן כל צלע של המשושה קטנה פי 2 מכל צלע של המשולש. נחלק את המשושה והמשולש בצורה הבאה:

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב ב'





כל המשולשים הקטנים בציור הם משולשים שווי צלעות שצלעותיהם שוות לצלעות המשושה או לחצאים של צלעות המשולש, כלומר כל המשולשים הקטנים זהים ולכן גם שטחיהם שווים. המשושה מורכז מ-6 משולשים כאלו והמשולש מ-4 משולשים ולכן שטח המשושה גדול פי אחד וחצי משטח המשולש ולכן אם שטח המשולש הוא 60 אז שטח המשושה הוא 90.

6. יש במסלול מעגלי באורך 92. סוס, חמור וגמל יוצאים מאותה נקודה ומתחילים ללכת לאורך המעגל: הסוס והגמל הולכים נגד כיוון השעון, והחמור בכיוון השעון. מהירות של הגמל 1 מטר לשנייה, של החמור – 3, של הסוס – 5. תוך כמה שניות שלושתם יפגשו שוב?
הערה: הפגישה לא בהכרח בנקודת ההתחלה.

פתרון: מהירותו דל הסוס יחסית לגמל היא 4 מטר לשנייה ולכן כעבור $92:4 = 23$ שניות הסוס יעשה סיבוב שלם ביחס לגמל (יעקוף אותו בסיבוב). מהירותו של החמור ביחס לגמל גם היא 4 מטר לשנייה ולכן גם הוא יפגוש את הגמל שוב לאחר 23 שניות ולכן כעבור 23 שניות שלושתם יפגשו שוב.

7. נתונה טבלה בגודל 3×3. הילה רוצה לרשום במשבצות הטבלה ספרות מ-1 עד 9, כך שכל הסכומים בשורות ועמודות הטבלה יהיו שונים, והסכום הכולל של הטבלה יהיה קטן ככל האפשר. מתור לחזור על אותה ספרה מספר פעמים. מה הוא הסכום הקטן ביותר שהילה יכולה לקבל?

פתרון: הסכום הקטן ביותר בשורה כלשהי יכול להתקבל אם שלושת המספרים בשורה הם 1 ולכן הסכום הקטן ביותר בשורה שאנו יכולים לצפות אליו הוא 3. אם אנו רוצים שכל הסכומים בכל השורות וכל העמודות יהיו שונים המספרים הקטנים ביותר שאפשר לצפות אליהם הם: 3,4,5,6,7,8.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>

שלב ב'

נחשב את סכום המספרים בטבלה בשתי דרכים: בפעם הראשונה נחשב את סכום המספרים בכל שורה ולאחר מכאן נסכום את שלושת הסכומים של השורות ובפעם השנייה נסכום את המספרים בכל עמודה ולאחר מכאן נסכום את שלושת הסכומים של העמודות. ברור שבשתי הפעמים הינו צריכים לקבל את אותו הדבר, בשתי הפעמים חישבנו את סכום המספרים בטבלה.

המסכנה שלנו תהיה שאם נתבונן בששת המספרים שהם הסכומים בשורות והסכומים בעמודות אז ניתן לחלק אותם לשתי קבוצות של 3 מספרים כל אחת שהסכום בכל קבוצה שווה.

כעט נשים לב שלא נצליח להגיע למספרים המינימליים שרצינו להגיע אליהם, 3,4,5,6,7,8 מכיוון שסכומם הוא $3+4+5+6+7+8=33$ וזה הוא מספר אי זוגי ולכן לא ניתן לחלק אותם לשתי קבוצות עם סכומים זהים.

הסכום הבא שאנו ננסה כמובן יהיה 34 שאותו אפשר לקבל בעזרת 3,4,5,6,7,9. כעט נשאר לנו לבנות דוגמה עם הסכומים האלה וזה גם יהיה לנו קל כי אנו יודעים שצריך לחלק את המספרים האלה לשתי קבוצות עם סכומים שווים, קל לראות שצריך לחלק אותם לקבוצות של 3,5,9 ו- 4,6,7 והטבלה שמקיימת את זה היא כזו:

1	1	2	4
1	2	3	6
1	2	4	7
3	5	9	