

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

שלב ב' - פתרונות

1. על הלוח כתוב מספר דו ספרתי.
אבי אמר: "ספרת היחידות של המספר היא 3"
בני אמר: "זה הוא מספר ריבועי"
גילי אמרה: "המספר הזה הוא כפולה של 12"
אז המורה אמרה: "יש פה שני משפטים נכונים ואחד שגוי".
איזה מספר היה כתוב על הלוח?

פתרון: לא יתכן כי גם אבי וגם גילי אמרו משפט נכון מכיוון שאם המספר מתחלק ב-12 אז בפרט הוא מתחלק ב-2 ולכן ספר היחידות שלו חייבת להיות זוגית ולכן בפרט לא יכולה להיות 3.

נשארנו עם שתי אפשרויות או שאבי ובני אמרו שני משפטים נכונים או שבני וגילי אמרו את המשפטים הנכונים.

נבדוק את המקרה שאבי ובני אמרו שני משפטים נכונים. אם ספרת היחידות של המספר היא שלוש אז הוא אי זוגי ולכן הוא יכול להיות ריבוע של 5,7 או 9 אבל הריבועים שלהם הם 25,49 ו-81 ואף אחד מהם לא מסתיים ב-3, ולכן המקרה הזה בלתי אפשרי.

נבדוק את המקרה שבני וגילי אמרו את המשפטים הנכונים. אם המספר מתחלק ב-12 אז הוא מתחלק גם ב-3 וגם ב-4 ואם הוא גם ריבוע אז הוא צריך להתחלק ב-3 פעמיים וצריך להתחלק גם ב-4 (הוא לא צריך להתחלק ב-4 פעמיים מכיוון ש-4 הוא כבר ריבוע) ולכן המספר צריך להתחלק ב-

$$36 = 4 * 3 * 3, \text{ יש רק שני מספרים דו ספרתיים שמתחלקים ב-36 והם 36 ו-72, ברור ש-36 הוא } 6^2 \text{ ו-72 אינו ריבוע.}$$

תשובה: המספר שהיה כתוב על הלוח הוא 36.

2. ורד החסירה ממספר תלת ספרתי את המספר המורכב מאותן הספרות שכתובות בסדר הפוך.
כתוצאה היא קיבלה מספר דו ספרתי. מצאו את המספר הדו ספרתי שהיא קיבלה.

פתרון: נסמן את הספרות של המספר שוורד רשמה ב- "א", "ב", "ג". התרגיל שוורד עשתה הוא:

	א	ב	ג
—	ג	ב	א
	0	ד	ה

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

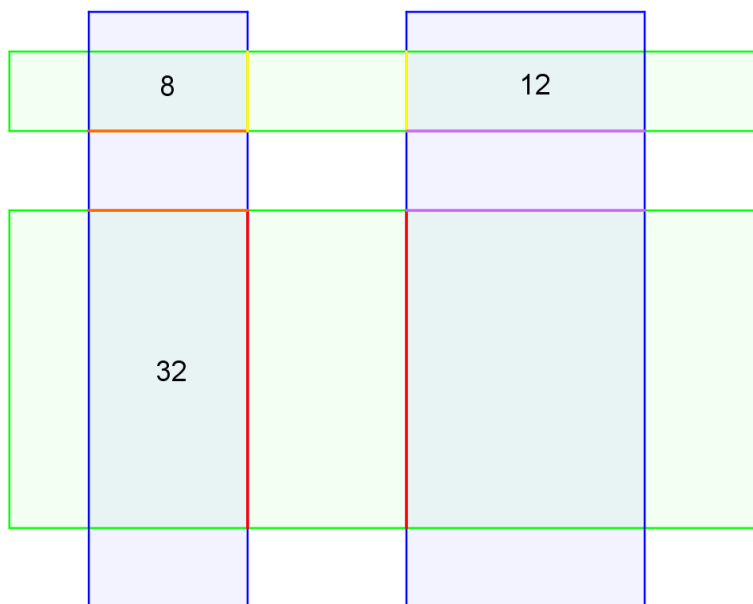
שלב ב' - פתרונות

אם הספרה "א" שווה לספרה "ג" אז הספרה "ד" תהיה שווה ל-0 ולכן התוצאה שתתקבל לא תהיה מספר דו פרתי, בניגוד לנתון. מכאן נסיק כי הספרה "ג" קטנה מהספר "א" (אחרת ורד הייתה מקבל מספר שקטן מ-0), לכן מספרת היחידות רוצים לחסר את מספר גדול ממספר קטן ולכן צריך להעביר ל-"ג" עשיריה, אבל בספרת העשרות "ב" ו-"ב" מצטמצמים ולכן צריך להעביר אחד מהמאות. בנוסף אנו יודעים שלאחר שחסר מ-"א" 1 (נעביר אותו לטובת שנוכל לחסר בספרת היחידות) ואז נחסר ממנו את "ג" נקבל 0 (כי בסוף נקבל מספר דו ספרתי) ולכן "א" צריך להיות גדול מ-"ג" ב-1.

כעת נתבונן בספר היחידות, היה את "ג" הוספנו לו 10 ואז החסרנו ממנו את "א" שגדול ממנו ב-1 ולכן בתוצאה נקבל 9, כלומר "ה"=9. נשאר להבין מה קרה בספרת העשרות, "ב" הצטמצם עם "ב" ואז העברנו 10 מספרת המאות ואז העברנו 1 לספרת האחדות ולכן נשאר לנו "9" ולכן "ד"=9.

סך הכל מקבלים שוורד קיבלה את המספר הדו ספרתי 99.

3. דניאל צייר ארבעה מלבנים שצלעותיהם מקבילות זו לזו. וחישב את שטחיהם של שלושת אזורי החיתוך שטחים של שלושה האזורים של החיתוכים שלהם. מצאו שטח של החיתוך הרביעי.



פתרון: השטח שאנו מעוניינים לחשב שווה למכפלה של הקטע האדום והסגול. מהמלבן עם שטח 12 אנו יודעים כי מכפלתם של הקטע הסגול והצהוב שווה 12, ומהמלבן עם שטח 32 אנו יודעים כי מכפלתם של הקטע אדום והכתום שווה 32.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

שלב ב' - פתרונות

נכפיל את שטחם של שני המלבנים, של 12 ושל 32, ונקבל כי מכפלתם של הקטע האדום הכתום הסגול והצהוב שווה $32 * 12 = 384$, אבל מהמלבן עם שטח 8 אנו יודעים כי מכפלתם של השטע הכתום והצהוב שווה 8 ולכן אם נחלק את מכפלתם של ארבעת הקטעים הצבעוניים במכפלה של הקטע הכתום והצהוב נקבל את המכפלה של הקטע האדום והסגול ולכן נקבל שהיא שווה ל-
 $384 : 8 = 48$.

נסכם את מה שעשינו בתרגיל אחד:

$$? = \text{סגול} * \text{אדום} = \frac{(\text{כתום} * \text{אדום}) * (\text{סגול} * \text{צהוב})}{\text{כתום} * \text{צהוב}} = \frac{32 * 12}{8} = 48$$

4. בכיתה מספר תלמידים ולכל אחד מספר סוכריות:

יש בדיוק 10 ילדים עם לפחות סוכריה אחת,

בדיוק 8 ילדים עם לפחות שתי סוכריות,

בדיוק 6 ילדים עם לפחות 3,

בדיוק 4 ילדים עם לפחות 4,

בדיוק ו-2 ילדים עם 5 סוכריות.

ידוע שלאף אחד אין יותר מ-5 סוכריות. כמה סוכריות יש בכיתה?

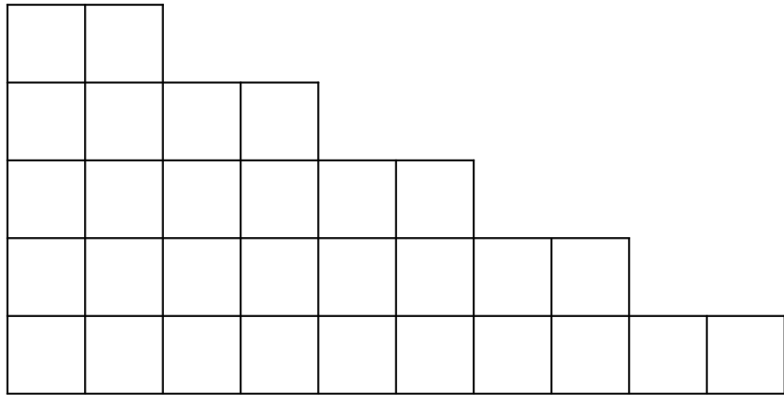
פתרון: נבנה דיאגרמה, העמודות בדיאגרמה ייצגו את הילדים והגובה בכל עמודה יתאר את כמות הסוכריות של הילד. אנו מתבקשים לחשב את גודל הדיאגרמה.

נתון שיש בדיוק 10 ילדים עם לפחות סוכריה אחת, כלומר בשורה הראשונה בדיאגרמה יש בדיוק 10 משבצות.

בנוסף נתון שיש בדיוק 8 ילדים עם לפחות שתי סוכריות, כלומר בשורה השנייה בדיאגרמה יהיו בדיוק 8 משבצות. נתון שיש בדיוק 6 ילדים עם לפחות 3, בדיוק 4 ילדים עם לפחות 4, בדיוק ו-2 ילדים עם 5 סוכריות. כלומר בשורות השלישית הרביעית והחמישית יש בדיוק 6, 4, 2 משבצות ולכן סך הכל בדיאגרמה יהיו $30 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$ משבצות, שזה כמובן גם כמות הסוכריות בכיתה.

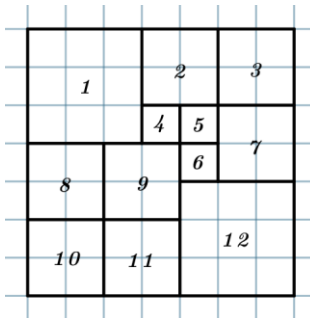
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

שלב ב' - פתרונות



הערה: דיאגרמה כזו נקראת דיאגרמת יאנג.

5. ברשותכם הרבה ריבועים מקרטון בגדלים 1×1 , 2×2 ו- 3×3 , ועליכם להרכיב מהם ריבוע בגודל 7×7 . מה הוא המספר הקטן ביותר האפשרי של ריבועים שתצטרכו?



פתרון:

תשובה: 12. ראו את הדוגמה בציור.

6. כמה מספרים דו ספרתיים מתחלקים ב-2 או ב-5, ולא מתחלקים ב-3?

פתרון: יש 90 מספרים דו ספרתיים, מבין כל שני מספרים רצופים בדיוק אחד מתחלק ב-2 ולכן יש ולכן יש $\frac{90}{2}$ מספרים דו ספרתיים שמתחלקים ב-2, ומבין כל 5 מספרים רצופים בדיוק אחד מתחלק ב-5 ולכן יש $\frac{90}{5}$ מספרים דו ספרתיים שמתחלקים ב-5 (שימו לב השתמשנו בכך ש-90 מתחלק ב-2 וב-5 ולכן קיבלנו בדיוק חצי וחמישית). הינו רוצים להגיד שיש $\frac{90}{2} + \frac{90}{5}$ מספרים דו ספרתיים שמתחלקים ב-2 או ב-5 אבל זה לא נכון כי מבין כל 10 מספרים רצופים יש מספר שמתחלק גם ב-2 וגם ב-5 (מתחלק ב-10) שספרנו פעמיים ולכן צריך לחסר $\frac{90}{10}$ מספרים ואז נקבל שיש $\frac{90}{2} + \frac{90}{5} - \frac{90}{10}$ מספרים דו ספרתיים שמתחלקים ב-2 או ב-5.

כעת נספור כמה מהם מתחלקים ב-3. מבין כל 6 מספרים יש מספר שמתחלק גם ב-2 וגם ב-3 ולכן צריך לחסר $\frac{90}{6}$ מספרים (שוב השתמשנו בכך ש-90 מתחלק בלי שארית ב-2,3 ו-5), ומבין כל 15

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ז

שלב ב' - פתרונות

מספרים יש מספר שמתחלק גם ב-5 וגם ב-3 ולכן צריך לחסר $\frac{90}{15}$ מספרים, אבל מבין כל 30 מספרים יש מספר שמתחלק גם ב-2 גם ב-5 וגם ב-3, מספרים כאלה החסרנו פעמיים ולכן צריך להוסיף אותם, כלומר נוסיף עוד $\frac{90}{30}$ מספרים.

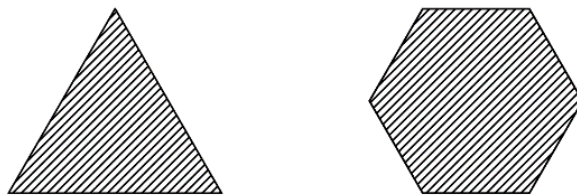
סך הכל אנו מקבלים שיש

$$90 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{6} - \frac{1}{15} + \frac{1}{30} \right) = 90 \cdot \frac{15 + 6 - 3 - 5 - 2 + 1}{30} = 90 \cdot \frac{12}{30} = 36$$

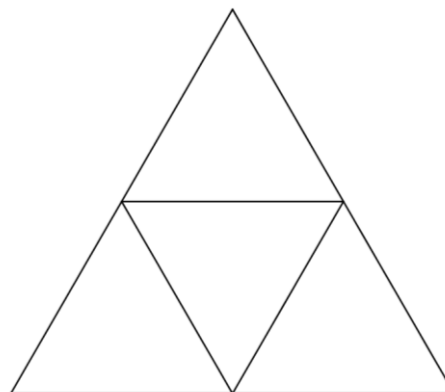
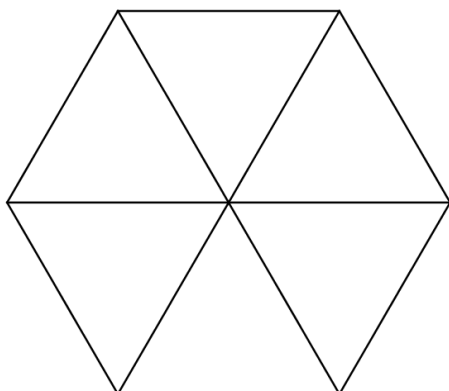
מספרים זו ספרתיים שמתחלקים ב-2 או ב-5 אבל לא ב-3.

הערה: יש רק 90 מספרים זו ספרתיים ולכן ניתן לרשום את כולם ולבדוק כמה מספרים מקיימים את התנאים, בנוסף אפשר לספור כמה מספרים כאלה יש עד 40 ולהכפיל פי 3 מכיוון שעד 40 יש 30 מספרים זו ספרתיים וזה בדיוק אורך המחזור (כי $2 * 3 * 5 = 30$), עד 40 יש בדיוק 12 מספרים שמקיימים את התנאים, זה בדיוק החישוב שעשינו בפתרון אבל בלי שברים, פשוט בודקים בידיים.

7. יש משושה משוכלל ומשולש שווה צלעות עם היקף זהה. ידוע ששטח המשולש שווה ל-60. מצאו את שטח המשושה.



פתרון: למשולש ומשושה יש את אותו ההיקף אבל למשושה יש פי שניים יותר צלעות ולכן כל צלע של המשושה קטנה פי 2 מכל צלע של המשולש. נחלק את המשולש והמשולש בצורה הבאה:



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

שלב ב' - פתרונות

כל המשולשים הקטנים בציור הם משולשים שווי צלעות שצלעותיהם שוות לצלעות המשושה או לחצאים של צלעות המשולש, כלומר כל המשולשים הקטנים זהים ולכן גם שטחיהם שווים. המשושה מורכז מ-6 משולשים כאלו והמשולש מ-4 משולשים ולכן שטח המשושה גדול פי אחד וחצי משטח המשולש ולכן אם שטח המשולש הוא 60 אז שטח המשושה הוא 90.