האולימפיאדה הארצית של המתמטיקאי הצעיר - פתרונות

כיתות ה-ו

שאלה 1.

לשמואל יש עדר בו 9 כבשים ו-5 גמלים. הוא רוצה לחלק את העדר בין שני בניו, יוסי ודני, כך שכל אחד מהם יקבל חלק שווה ערך. ידוע כי 7 כבשים עולים כמו 3 גמלים. כיצד יכול שמואל לחלק את העדר בין שני בניו שווה בשווה, בלי למכור אף חיה?

פתרון.

נדמיין ש-7 מתוך 9 הכבשים הוחלפו ב-3 גמלים. אז יש לנו 2 כבשים ו-8 גמלים. את החיות האלה קל לחלק לשני חלקים שווי ערך: כבש אחד ו-4 גמלים בכל אחד. אז יוסי יקבל כבש אחד ו-4 גמלים, שזה חצי מהכל מבחינת העלות, ודני יקבל את כל השאר.

שאלה 2.

ברשותכם בול עץ ארוך מאוד. האם תוכלו למדוד ממנו מטר אחד בדיוק, אם יש לכם לצורך זה

א. מקל באורך של מטר וחצי ועוד מקל באורך של 40 סנטימטרים,

ב. מקל באורך של מטר וחצי ועוד מקל באורך של 30 סנטימטרים,

ואין לכם שום כלי מדידה נוספים? נמקו!

פתרון.

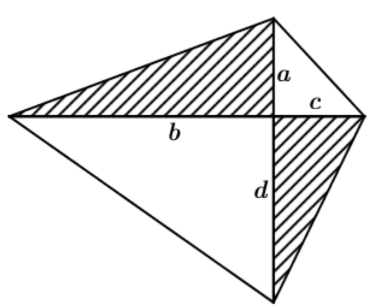
א. זה אפשרי. בהתחלה נמדוד על בול העץ 3 מטרים: מטר וחצי ועוד פעם מטר וחצי. עכשיו נחסיר מזה 2 מטרים באופן הבא: נמדוד מהסוף של 3 מטרים חתיכה של 40 ס"מ, ואז נעשה את זה עוד 4 פעמים. כך נגיע ל- $300-5\cdot 40=100$ ס"מ, כלומר מטר אחד.

ב. זה בלתי אפשרי. נשים לב כי כל מספר של סנטימטרים שאנחנו יכולים למדוד, חייב להתחלק ב-3. ומטר אחד שווה ל-100 סנטימטרים, שזה לא מתחלק ב-3.

שאלה 3.

בציור מרובע בעל אלכסונים מאונכים. הוכיחו כי מכפלת השטחים המקווקים בתוך המרובע שווה למכפלת השטחים הלבנים בתוך המרובע.

פתרון.



נסמן את החלקים של האלכסונים דרך a, b, c, d (ראו ציור).

אזי השטחים של המשולשים המקווקוים שווים ל- $\frac{ab}{2}$ ו- $\frac{cd}{2}$,

ומכפלתם $\frac{abcd}{4}$. מצד שני, השטחים של המשולשים הלא מקווקוים

שווים ל- $\frac{ad}{2}$ ו- $\frac{bc}{2}$, וגם המכפלה שלהם שווה ל- $\frac{abcd}{4}$.

האולימפיאדה הארצית של המתמטיקאי הצעיר - פתרונות
כיתות ה-ו

<u>שאלה 4.</u>
בים הקסום חיים תמנונים שיודעים לדבר. כל תמנון או תמיד דובר אמת, או תמיד משקר. יום אחד התקיימה השיחה הבאה בין ארבעה תמנונים, אבי, בני, גידי ודני:

אבי: אני תמנון ירוק
בני: אני לא ירוק
גידי: כל התמנונים הירוקים שקרנים
דני: רק תמנון ירוק יכול להיות שקרן

ידוע שרק אחד מארבעה אלה שקרן, ושאר דוברי אמת.
א. מי הוא השקרן מבין ארבעה החברים? נמקו!
ב. האם ניתן לדעת מה הצבע שלו?

<u>פתרון.</u>
א. נתבונן בדבריו של גידי. יש שני מקרים: או שהוא אומר אמת, או שהוא משקר.
(1) גידי אומר אמת. אז אבי בוודאות משקר, כי אילו הוא היה אומר אמת, אז הוא היה ירוק, אבל כל הירוקים שקרנים לפי דבריו של גידי. אז יש לנו שקרן שהוא לא ירוק. אבל, דני אומר שרק תמנון ירוק יכול להיות שקרן. אז אם זה המצב, גם דני משקר – אבל ידוע שיש רק שקרן אחד. לכן האפשרות הזאת פסולה.
(2) גידי משקר. במקרה זה כל השאר צריכים להיות דוברי אמת, ובאפשרות הזאת אין סתירות.
לכן גידי הוא השקרן.
ב. לפי דבריו של דני (שהוא דובר אמת), רק תמנון ירוק כול להיות שקרן. לכן גידי, שהוא השקרן, בהכרח ירוק.

<u>שאלה 5.</u>
בכיתה של 25 תלמידים התקיים בוחן המורכב מ-7 שאלות. הוכיחו כי לפחות אחד מהשניים נכון:
(1) יש ילד שפתר מספר אי זוגי של שאלות,
(2) יש שאלה שפתרו אותה מספר זוגי של ילדים.

<u>פתרון.</u>
ניצור טבלה בה נסמן ב-V אילו שאלות פתר כל תלמיד.
למשל, בדוגמה שבציור תלמיד 1 פתר שאלות 2, 4, 5 ו-6.

נתבונן במספר ה-V-ים בטבלה,

	שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלה 4	שאלה 5	שאלה 6	שאלה 7
תלמיד 1		V		V	V		V
תלמיד 2	V		V	V		V	
תלמיד 3	V			V			
...				...			
תלמיד 25		V	V		V	V	V

הוא יכול להיות זוגי או אי זוגי.

אם מספר ה-V-ים בטבלה זוגי, אז חייבת להיות עמודה עם מספר זוגי של V-ים. אחרת, אם כל העמודות אי זוגיות, יש סך הכל מספר אי זוגי של V-ים בטבלה. ועמודה שיש בה מספר זוגי של V-ים מסמנת שאלה שפתרו אותה מספר זוגי של תלמידים, כלומר (2) מתקיים.
אם מספר ה-V-ים בטבלה אי זוגי, אז חייבת להיות שורה עם מספר אי זוגי של V-ים. אחרת, אם כל שורה הינה זוגית, יש סך הכל מספר זוגי של V-ים בטבלה. ושורה שיש בה מספר אי זוגי של V-ים מסמנת תלמיד שפתר מספר זוגי של שאלות, כלומר (1) מתקיים.

<u>שאלה 6.</u>

לפומבה יש 11 סוכריות שוקולד ו-13 סוכריות טופי. בכל פעם הוא יכול לאכול או שתי סוכריות מסוגים שונים, או שלוש סוכריות מאותו הסוג. מה הוא המספר הגדול ביותר של סוכריות שפומבה יוכל לאכול לפי הכללים האלה? נמקו!

<u>פתרון.</u>

פומבה יכול לאכול 23 סוכריות. למשל, לאכול 4 פעמים שלישיות של סוכריות טופי, לאכול 3 פעמים שלישיות של סוכריות שוקולד, ולאכול פעם אחת סוכרית שוקולד וסוכריית טופי:

$$23=4\times3+3\times3+2$$

נראה שהוא לא יוכל לאכול את כל 24 הסוכריות. נצייר על כל סוכריית שוקולד מספר 2, ועל כל סוכריית טופי מספר 1. נשים לב כי סכום המספרים שפומבה אוכל כל פעם, מתחלק ב-3. לכן גם הסכום הכולל שהוא יכול לאכול, חייב להיות כפולה של 3. אבל, הסכום ההתחלתי של המספרים שווה ל-$2\cdot11+1\cdot13=35$, שזה לא מתחלק ב-3. לכן הוא לא יוכל לאכול את כל הסוכריות.

<u>שאלה 7.</u>

דני ביצע חישובים הבאים מעל לוח הכפל של המספרים מ-1 עד 10:

הוא חישב את סכום כל המספרים בריבוע השמאלי העליון בגודל 9×9 בתוך לוח הכפל,
הוסיף לו סכום כל המספרים בריבוע הימני התחתון 9×9,
החסיר מהתוצאה את סכום כל המספרים בריבוע הימני העליון 9×9,
ואז החסיר את סכום כל המספרים בריבוע השמאלי התחתון 9×9.

איזו תוצאה הוא קיבל?

האולימפיאדה הארצית של המתמטיקאי הצעיר - פתרונות

כיתות ה-ו

פתרון. סכום של ריבוע השמאלי העליון 9×9 פחות סכום של ריבוע הימני העליון 9×9:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

זה בעצם סכום של 9 המספרים העליונים בעמודה השמאלית פחות סכום של 9 המספרים העליונים בעמודה ימנית. הרי המספרים בעמודות האמצעית פעם מתווספים ופעם מוחסרים וזה מתקזז.

סכום של ריבוע ימני התחתון 9×9, פחות סכום של ריבוע שמאלי תחתון 9×9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

האולימפיאדה הארצית של המתמטיקאי הצעיר - פתרונות

כיתות ה-ו

זה בעצם סכום של 9 המספרים התחתונים בעמודה הימנית פחות סכום של 9 המספרים התחתונים בעמודה השמאלית. הרי שוב, המספרים בעמודות האמצעית פעם מתווספים ופעם מוחסרים וזה מתקזז.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

לכן כל החישוב של דני אפשר לעשות רק על העמודות הקיצוניות,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

אבל אפשר גם לשים לב שגם כל המספרים בשורות לא קיצוניות מתקזזים, כי פעם אחד מוסיפים אותם ופעם אחד מחסירים אותם.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

לכן מה שנשאר בסוף זה רק המשבצות הפינתיות:

$100 - 10 - 10 + 1 = 81$.