

האולימפיאדה הארצית של המתמטיקאי הצעיר - פתרונות

כיתות ג-ד

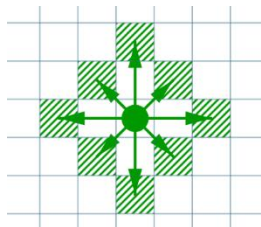
שאלה 1.

ליונתן יש אוסף של צעצועי עץ. חלקם קוביות וחלקם כדורים, חלקם אדומים וחלקם כחולים. ידוע שיש יותר כדורים מאשר קוביות, וידוע שיש יותר צעצועים כחולים מאשר צעצועים אדומים. הוכיחו כי יש ליונתן כדור כחול.

פתרון.

נשים לב כי הכדורים הם יותר מחצי של הכל, וגם הצעצועים הכחולים הם יותר מחצי של הכל. עכשיו נניח בשלילה שאין כדור כחול, כלומר הקבוצות האלה לא נחתכות. אבל אז סך כל הצעצועים הוא לפחות כמו מספר הכדורים ועוד מספר הצעצועים הכחולים, שזה יותר מפעמיים חצי, כלומר יותר מכמות הכוללת של הצעצועים. סתירה.

שאלה 2.



ישנו דף משבצות אינסופי, ובאחת המשבצות שלו יושב חרגול. החרגול יודע לקפוץ שתי משבצות בכל כיוון אופקי או אנכי, והוא יודע לקפוץ למשבצת הסמוכה לפי אלכסון. האם יוכל החרגול להגיע אי פעם למשבצת שסמוכה למשבצת ההתחלתית לפי צלע? נמקו!

פתרון.

נצבע את דף המשבצות בצביעת שחמט. נשים לב כי החרגול יכול לעבור רק בין משבצות באותו צבע: אם המשבצת ההתחלתית לבנה, הוא יכול לקפוץ רק למשבצת לבנה, ואם המשבצת ההתחלתית שחורה, הוא יכול לקפוץ רק למשבצת שחורה. לכן החרגול יכול להגיע רק למשבצות שהן באותו הצבע כמו המשבצת ממנה הוא מתחיל. אבל המשבצת הסמוכה לה היא בצבע אחר. לכן אי אפשר להגיע אליה.

שאלה 3.

ספרות מ-1 עד 5 כתובות במעגל בסדר כלשהו. דני סכם חמישה מספרים זו ספרתיים הנוצרים מזוגות של ספרות שכנות על המעגל (בכיוון השעון). מצאו את כל האפשרויות לסכום זה.

פתרון.

נשים לב כי כל ספרה משתתפת ביצירת הסכום הזה פעמיים: פעם אחת כספרת היחידות של מספר כלשהו, ופעם אחת כספרת העשרות. לכן סכום כל חמישה המספרים תמיד יהיה שווה ל-

$$\begin{aligned} 1 \cdot (1+10) + 2 \cdot (1+10) + 2 \cdot (1+10) + 4 \cdot (1+10) + 5 \cdot (1+10) &= \\ &= (1+2+3+4+5) \cdot 11 = 265 \end{aligned}$$

ללא תלות בסידור הספרות על המעגל.

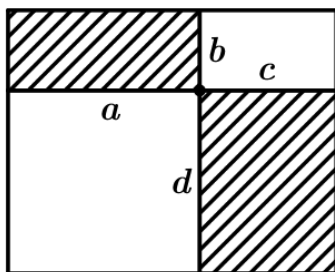
האולימפיאדה הארצית של המתמטיקאי הצעיר - פתרונות

כיתות ג-ד

שאלה 4.

בציור מלבן ונקודה בתוכו. מעבירים דרך הנקודה שני קטעים שמחלקים את המלבן ל-4 מלבנים קטנים יותר. הוכיחו כי מכפלת השטחים המקווקוים בתוך המלבן שווה למכפלת השטחים הלבנים בתוך המלבן.

פתרון.



נסמן את הצלעות של המלבנים הקטנים דרך a, b, c, d . אזי השטחים של המלבנים המקווקוים שווים ל- ab ו- cd , ומכפלתם $abcd$.

מצד שני, השטחים של המלבנים הלא מקווקוים שווים ל- ad ו- bc , וגם המכפלה שלהם שווה ל- $abcd$.

שאלה 5.

לשמואל יש עדר בו 9 כבשים ו-5 גמלים. הוא רוצה לחלק את העדר בין שני בניו, יוסי ודני, כך שכל אחד מהם יקבל חלק שווה ערך. ידוע כי 7 כבשים עולים כמו 3 גמלים. כיצד יכול שמואל לחלק את העדר בין שני בניו שווה בשווה, בלי למכור אף חיה?

פתרון.

נדמיין ש-7 מתוך 9 הכבשים הוחלפו ב-3 גמלים. אז יש לנו 2 כבשים ו-8 גמלים. את החיות האלה קל לחלק לשני חלקים שווים ערך: כבש אחד ו-4 גמלים בכל אחד. אז יוסי יקבל כבש אחד ו-4 גמלים, שזה חצי מהכל מבחינת העלות, ודני יקבל את כל השאר.

שאלה 6.

בים הקסום חיים תמנונים שיודעים לדבר. כל תמנון או תמיד דובר אמת, או תמיד משקר. יום אחד התקיימה שיחה הבאה בין ארבעה תמנונים, אבי, בני, גידי ודני:

אבי: אני תמנון ירוק

בני: אני לא ירוק

גידי: כל התמנונים הירוקים שקרנים

דני: רק תמנון ירוק יכול להיות שקרן

ידוע שרק אחד מארבעה אלה שקרן, ושאר דוברי אמת.

א. מי הוא השקרן מבין ארבעה החברים? נמקו!

ב. האם ניתן לדעת מה הצבע שלו?

האולימפיאדה הארצית של המתמטיקאי הצעיר - פתרונות

כיתות ג-ד

פתרון.

א. נתבונן בדבריו של גידי. יש שני מקרים: או שהוא אומר אמת, או שהוא משקר.

(1) גידי אומר אמת. אז אבי בוודאות משקר, כי אילו הוא היה אומר אמת, אז הוא היה ירוק, אבל כל הירוקים שקרנים לפי דבריו של גידי. אז יש לנו שקרן שהוא לא ירוק. אבל, דני אומר שרק תמנון ירוק יכול להיות שקרן. אז אם זה המצב, גם דני משקר – אבל ידוע שיש רק שקרן אחד. לכן האפשרות הזאת פסולה.

(2) גידי משקר. במקרה זה כל השאר צריכים להיות דוברי אמת, ובאפשרות הזאת אין סתירות.

לכן גידי הוא השקרן.

ב. לפי דבריו של דני (שהוא דובר אמת), רק תמנון ירוק יכול להיות שקרן. לכן גידי, שהוא השקרן, בהכרח ירוק.

שאלה 7.

ברשותכם בול עץ ארוך מאוד. האם תוכלו למדוד ממנו מטר אחד בדיוק, אם יש לכם לצורך זה

א. מקל באורך של מטר וחצי ועוד מקל באורך של 40 סנטימטרים,

ב. מקל באורך של מטר וחצי ועוד מקל באורך של 30 סנטימטרים,

ואין לכם שום כלי מדידה נוספים? נמקו!

פתרון

א. זה אפשרי. בהתחלה נמדוד על בול העץ 3 מטרים: מטר וחצי ועוד פעם מטר וחצי. עכשיו נחסיר

מזה 2 מטרים באופן הבא: נמדוד מהסוף של 3 מטרים חתיכה של 40 ס"מ, ואז נעשה את זה עוד 4

פעמים. כך נגיע ל- $100 = 5 \cdot 40 - 300$ ס"מ, כלומר מטר אחד.

ב. זה בלתי אפשרי. נשים לב כי כל מספר של סנטימטרים שאנחנו יכולים למדוד, חייב להתחלק ב-3.

ומטר אחד שווה ל-100 סנטימטרים, שזה לא מתחלק ב-3.