

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד, שלב א'

פתרונות

שאלה 1.

רוכב אופניים נוסע על כביש ישר ללא פניות ורואה בצד הכביש את השלט:



הוא ממשיך בתנועתו, ורואה שלט נוסף:

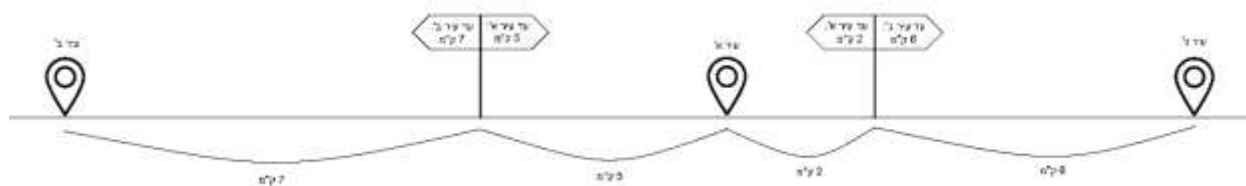
מצאו את המרחק בין ערים ב' ו-ג'.

תשובה.

20.

פתרון.

נבין כיצד ממוקמים זה ביחס לזה שני השלטים ושלושה הערים:



מכאן, המרחק בין הערים ב' ו-ג' הינו $7 + 5 + 2 + 6 = 20$ קילומטרים.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד, שלב א'

פתרונות

שאלה 2.

פי כמה סכום כל המספרים מ-1 עד 99 קטן מסכום כל המספרים מ-1 עד 9999?

תשובה.

10100

טענת עזר.

סכום כל המספרים מ-1 עד n שווה ל- $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

הסבר: יש $\frac{n}{2}$ זוגות מספרים, כך שסכום בכל זוג שווה ל- $n+1$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n-2 & n-1 & n & & \\ & & \underbrace{\hspace{2cm}} & & & & & & & & \\ & & & \underbrace{\hspace{3cm}} & & & & & & & \\ & & & & \underbrace{\hspace{4cm}} & & & & & & \\ & & & & & & \underbrace{\hspace{5cm}} & & & & \\ & & & & & & & & \underbrace{\hspace{6cm}} & & \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{7cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{8cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{9cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{10cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{11cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{12cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{13cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{14cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{15cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{16cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{17cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{18cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{19cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{20cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{21cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{22cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{23cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{24cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{25cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{26cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{27cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{28cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{29cm}} \\ & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{30cm}} \end{array}$$

פתרון.

$$\frac{1+2+3+\dots+9999}{1+2+3+\dots+99} = \frac{9999 \cdot 10000/2}{99 \cdot 100/2} = \frac{9999 \cdot 10000}{99 \cdot 100} = 101 \cdot 100 = 10100$$

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד, שלב א'

פתרונות

שאלה 3.

לסבתא חנה יש הרבה עציצים עם פרחים בבית. יום אחד הגיעו אליה שלושה נכדים שלה, אבי, בני וגילי, וניסו לנחש כמה עציצים יש לה.
אבי אמר: "לסבתא יש יותר מ-8 עציצים",
בני אמר: "יותר מ-10, לדעתי",
ואז גילי אמרה: "לסבתא חנה יש לפחות 12 עציצים".
"שניים מכם צדקו, ומישהו אחד טעה" – ענתה הסבתא. אז כמה עציצים יש לה בבית?

תשובה.

11.

פתרון.

נראה שגילי טועה. אכן, אילו גילי הייתה צודקת, אז גם אבי, גם בני היו צודקים. כי כל מספר שגדול או שווה ל-12, הינו בהכרח גדול מ-10 וגדול מ-8. אבל אז כולם צדקו, וסבתא אמרה שבוודאות יש מישהו שטעה. לכן גילי בוודאות טעתה.

מכאן, מספר העציצים בבית של סבתא גדול מ-10 אך קטן מ-12. האפשרות היחידה: 11 עציצים.

שאלה 4.

מצאו מספר תלת ספרתי, שאם נוסיף לו 1, הוא יתחלק ב-7, אם נוסיף לו 2, הוא יתחלק ב-8, ואם נוסיף לו 3, הוא יתחלק ב-9.

תשובה.

510.

פתרון.

נשים לב ששאריות אחרי החלוקה של המספר ב-7, ב-8 וב-9 כולן שוות ל-6. לכן את ניקח מכפלה של 7, 8, 9, ו-6, ונוסיף לזה 6, זה יתאים. נחשב ונקבל: $7 \cdot 8 \cdot 9 + 6 = 510$.

הערה. אפשר לראות גם שזה מספר יחיד שמתאים, אבל זה לא דרוש.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד, שלב א'

פתרונות

שאלה 5.

נתבונן בכל המספרים מ-1 עד 4242. מצאו הפרש בין כמות המספרים האי זוגיים שמתחלקים ב-3 לבין כמות המספרים שמתחלקים ב-7 בתחום זה.

תשובה.

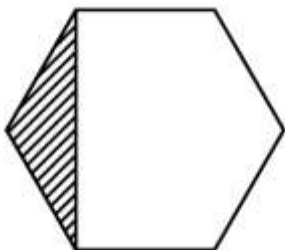
5225

פתרון.

מתוך 6 מספרים עוקבים, בדיוק אחד אי זוגי ומתחלק ב-3. המספר 4242 מתחלק ב-6, לכן בדיוק שישית מהמספרים הם אי זוגיים שמתחלקים ב-3. מתוך 7 מספרים עוקבים, בדיוק אחד מתחלק ב-7. 4242 מתחלק ב-7, לכן בדיוק שביעית מהמספרים הם כאלה שמתחלקים ב-7. ההפרש בין שתי הכמויות האלה הוא

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) \cdot 4242 = \frac{1}{42} \cdot 4242 = 101$$

שאלה 6.

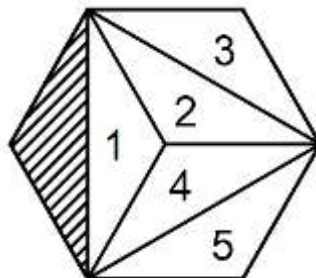


בציור משושה משוכלל. פי כמה השטח הלבן גדול יותר מהשטח המקווקו? (משושה משוכלל זה הוא משושה שכל הצלעות שלו שוות וכל הזוויות שלו שוות)

תשובה.

5

פתרון.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד, שלב א'

פתרונות

שאלה 7.

חשבו את ערך הביטוי ורשמו אותו כשבר עשרוני:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}$$

תשובה.

0.625

פתרון.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} = 0.625 \end{aligned}$$

שאלת המשך. לאיזו חוקיות אפשר לשים לב כאן?

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד, שלב א'

פתרונות

שאלה 8.

צובעים את לוח הכפל 10×10 בצביעת שחמט שחור ולבן, כך שהמשבצת של 1×1 צבועה בשחור. מצאו הפרש בין סכום כל המספרים במשבצות השחורות לסכום כל המספרים במשבצות הלבנות.

תשובה.

25.

פתרון.

נחלק את המשבצות השחורות והלבנות של השורה הראשונה לזוגות באופן הבא:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

הפרש המספרים בכל זוג כזה שווה ל-1, כלומר, כל זוג תורם 1 לטובת המשבצות הלבנות, וסך הכל הם תורמים 5.

באופן דומה, נחלק את המשבצות של השורה השנייה לזוגות:

2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

בשורה הזאת הפרש בין כל מספרים סמוכים שווה ל-2, לכן כל זוג תורם 2, אבל הפעם לטובת המשבצות השחורות. לכן השורה השנייה כולה תורמת 10 לטובת השחורים.

אם נמשיך באופן דומה לכל השורות, נקבל ששחורים פחות לבנים שווה

$$\begin{aligned} & 5 \cdot (10 - 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1) = \\ & = 5 \cdot ((10 - 9) + (8 - 7) + (6 - 5) + (4 - 3) + (2 - 1)) = 5 \cdot 5 = 25 \end{aligned}$$